EPFL Automne 2025

Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 7

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Anneaux integres

On rappelle qu'un anneau commutatif est dit integre si il est non-nul et qu'il verifie

$$\forall a, b \in A,\ a.b = 0_A \Longrightarrow a = 0_A \text{ ou bien } b = 0_A. \tag{0.1}$$

Exercice 1. Montrer qu'un corps est integre.

Exercice 2. Soient $(A, +_A, ._A)$ et $(B, +_B, ._B)$ deux anneaux commutatifs. On considere l'anneau produit

$$A \times B = \{(a, b),\ a \in A,\ b \in B\}$$

muni de l'addition et de la multiplication coordonee par coordonnee

$$(a, b) + (a', b') = (a +_A a', b +_B b'),\ (a, b).(a', b') = (a ._A a', b ._B b')$$

avec comme neutre et unite $0_{A\times B} = (0_A, 0_B),\ 1_{A\times B} = (1_A, 1_B)$.

1. Montrer que si, ni A ni B ne sont les anneaux nuls, alors $A \times B$ n'est pas un anneau integre (meme si A et B sont integres).

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif et $M_2(A)$ l'anneau des matrices 2×2 a coefficients dans A.

1. Montrer que $M_2(A)$ n'est pas integre (on pourra chercher un matrice non-nulle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle $M^2 = \mathbf{O}_2$).

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif et $I \subset A$ un ideal. On peut former l'anneau quotient A/I (discute dans la feuille precedente). On rappelle que

$$A/I = \{a \pmod I := a + I,\ a \in A\}$$

et que l'addition et la multiplication sont definies par

$$a\,(\mathrm{mod}\,I)+b\,(\mathrm{mod}\,I)=a+b\,(\mathrm{mod}\,I),\;\; a\,(\mathrm{mod}\,I).b\,(\mathrm{mod}\,I)=a.b\,(\mathrm{mod}\,I).$$

On va donner une condition necessaire et suffisante pour que l'anneau quotient A/I soit un anneau integre.

1. Montrer que si A/I est integre alors I a la propriete suivante :

$$I\neq A \text{ et } \forall a,b\in A,\;\; a.b\in I\Longrightarrow a\in I \text{ ou bien } b\in I \tag{0.2}$$

2. Un ideal $I\subset A$ verifiant (0.2) est dit *premier* . Montrer que si I est premier alors A/I est integre.

Corps

Exercice 5. Soit K et L des corps de caracteristique $\mathrm{car}(K)$ et $\mathrm{car}(L)$ et

$$\varphi : K\mapsto L$$

un morphisme d'anneaux non nul ($\varphi\neq \underline{0}_L$). Pour $n\in\mathbb{Z}$ on note

$$n_K:=\mathrm{Can}_K(n)=n.1_K \text{ (resp. } n_L:=\mathrm{Can}_L(n)=n.1_K)$$

l'image de n par les morphismes canoniques respectifs.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\varphi(n_K)=n_L$.
2. En deduire que necessairement $\mathrm{car}(K)=\mathrm{car}(L)$.

Exercice 6. ($\star$) Dans cet exercice on va demontrer le resultat suivant :

Lemme. *Soit A un anneau non-nul commutatif, integre et FINI alors A est un corps (tout element non-nul de A est inversible).*

Soit donc $a\in A-\{0_A\}$ non-nul, on veut montrer que a admet un inverse dans A.

Pour cela on considere la suite d'elements $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de A, donnee pour tout entier $n\geqslant 0$ par

$$a_n:=a^n=a.a.\cdots.a \;(n \text{ fois})$$

(avec $a_0=a^0=1_A$).

1. Montrer qu'il existe deux entiers $0 \leqslant m < n$ tels que $a^n = a^m$.
2. En deduire qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $a^k - 1_A = 0_A$ (on factorisera l'egalite $a^n - a^m = 0_A$)
3. Conclure la preuve du Lemme.

Exercice 7. Soit A un anneau commutatif non-nul et $I \subset A$ un ideal strict de A $(I \neq A)$.

1. On suppose que I a la propriete suivante :
$$\forall a \in A - I,\ a.A + I = A, \tag{0.3}$$
(on a note $a.A := \{a.a',\ a' \in A\}$). Montrer que le quotient A/I est un corps (on montrera que si $a \in A - I$ alors il existe $b \in A$ tel que $ab - 1 \in I$).
2. Montrer que si A/I est un corps alors I verifie (0.3).
3. Montrer que si I verifie (0.3) alors I est un ideal premier.
4. On suppose que I verifie (0.3) ; montrer que les seuls ideaux de A contenant I sont I et A (I est un ideal dit "maximal"). On supposera qu'il existe $J \neq A$ tel que $I \subset J$ et on raisonnera avec $a \in A - J$.
5. Soit $I \subset A$ un ideal dont les seuls ideaux le contenant sont A et I. Montrer que I verifie (0.3).

Exercice 8. Soit K un corps et $M_2(K)$ l'algebre des matrices 2×2 a coefficients dans K. Soit $\Delta \in K$ et
$$I_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On a
$$I_\Delta^2 = \Delta.\mathrm{Id}_2$$
et on a vu en cours que si Δ n'est pas un carre dans K alors
$$K[I_\Delta] = K.\mathrm{Id}_2 + K.I_\Delta$$
est un corps. On va examiner la reciproque. On suppose que Δ est un carre : $\Delta = \delta^2$ avec $\delta \in K$.

1. Montrer que $K[I_\Delta] = K.\mathrm{Id}_2 + K.I_\Delta$ reste un anneau commutatif contenant le corps des matrices scalaires $K.\mathrm{Id}_2 \simeq K$.
2. Montrer qu'il existe $Z = x.\mathrm{Id}_2 + y.I_\Delta \in K[I_\Delta]$ non-nul mais qui n'est pas inversible. Ainsi $K[I_\Delta]$ n'est par un corps.
3. Montrer qu'il existe $Z = x.\mathrm{Id}_2 + y.I_\Delta$ tel que
$$Z.\overline{Z} = \mathbf{O}_2$$
avec $\overline{Z} = x.\mathrm{Id}_2 - y.I_\Delta$. Ainsi $K[I_\Delta]$ n'est meme pas un anneau integre.